TD 11 : Applications

E, F et G désignent des ensembles quelconques.

Application indicatrice

1 ★★ Soit $A,B,C \in \mathscr{P}(E)$. On note $\mathbb{1}_X$ l'application indicatrice d'un ensemble $X \in \mathscr{P}(E)$. On a vu en cours que

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

ce qui signifie que pour tout $x \in E$, on a $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$.

1) Montrer que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.
2) On définit la différence symétrique de A et B comme étant l'ensemble noté :
$$A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$
Montrer que $\mathbb{1}_{A\Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$.
3) Justifier que $A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
4) En utilisant les fonctions indicatrices, montrer que
$$A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$$
(distributivité de $\cap$ sur Δ).
5) On souhaite savoir si $A\cup(B\Delta C) = (A\cup B)\Delta(A\cup C)$.
   (a) Calculer $\mathbb{1}_{A\cup(B\Delta C)} - \mathbb{1}_{(A\cup B)\Delta(A\cup C)}$. On pourra noter 1 la fonction constante égale à 1 définie sur E (càd $\mathbb{1}_E$).
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A, B et/ou C pour qu'il y ait égalité.

Images directes et réciproques

2 ★☆ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$. Déterminer les ensembles suivants :

1) $A = f(\mathbb{R})$
2) $B = f([0,1])$
3) $C = f^{-1}(\{3\})$
4) $D = f^{-1}(]-\infty,5])$

3 ★☆ Soit $f : x \mapsto x^2$. On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est stable par f si on a $f(A) \subset A$. Déterminer les parties stables par f parmi les ensembles suivants :

1) $A_1 = [0,1]$
2) $A_2 = [1,2]$
3) $A_3 = [-1,1]$
4) $A_4 = \mathbb{R}_+$

4 ★☆

1) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $f(]0,1])$.
2) Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3x}$. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. Déterminer $f^{-1}([2,3\sqrt{2}])$.

5 ★★ Soit $f : E \to E$ une application. On dit qu'une partie A est stable par f si $f(A) \subset A$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E, toutes stables par f. Montrer que les ensembles $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ sont stables par f.

Idem, avec injectivité et surjectivité

6 ★★ Soit $f : E \to F$ une application et $A, A' \in \mathscr{P}(E)$.

1) Montrer que : $A \subset A' \implies f(A) \subset f(A')$
2) Exhiber un cas particulier où l'implication réciproque est fausse.
3) On suppose que f est injective. Montrer que :
$$f(A) \subset f(A') \implies A \subset A'$$

7 ★★ Soit $f : E \to F$ une application et A, B deux parties de E.

1) Montrer que $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$.
2) Exhiber un cas particulier où l'inclusion réciproque est fausse.
3) On suppose que f est injective. Montrer que :
$$f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$$

8 ★★ Soit $f : E \to F$ une application.

1) Montrer que : $\forall A \in \mathscr{P}(E) \qquad A \subset f^{-1}(f(A))$
2) Montrer que : $\forall B \in \mathscr{P}(F) \qquad f(f^{-1}(B)) \subset B$
3) Montrer que f est surjective si et seulement si :
$$\forall B \in \mathscr{P}(F) \qquad f(f^{-1}(B)) = B$$
4) Montrer que f est injective si et seulement si :
$$\forall A \in \mathscr{P}(E) \qquad A = f^{-1}(f(A))$$

Injectivité, surjectivité, bijectivité

9 ★★ Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1 \qquad f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n-3 \qquad f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x-y$$

$$f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2 \qquad f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto e^z \qquad f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (x,-x)$$

$$f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \qquad f_8 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q},\ (a,b) \mapsto \frac{a}{b}$$

10 ★☆ Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$F(x,y,z) = (-x+y+z, z, y)$$
Calculer l'expression de $F \circ F$. Que peut-on en déduire sur F ?

11 ★☆ Soit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$, $c \neq 0$ et $ad \neq bc$. On considère l'application
$$f : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\},\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

1) Montrer que f est bien définie.
2) Montrer que f est bijective. Déterminer sa réciproque.

12 ★★ Soit f et g dans $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ les applications définies par :
$$f(n) = 2n \qquad \text{et} \qquad g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

1) Montrer que f et g ne sont pas bijectives.
2) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Sont-elles bijectives ?

13 ★★ Soit $p : E \to E$ telle que $p \circ p = p$ (on dit que p est idempotente).

1) Montrer que si p est injective alors $p = \mathrm{id}_E$.
2) Montrer que si p est surjective alors $p = \mathrm{id}_E$.

14 ★★ Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3) Montrer que si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

15 ★★★ Soit $f \in F^E$, $g \in G^F$ et $h \in H^G$ trois applications. On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.

16 ★★★ Soit $f : E \to F$ une application. On définit les applications :
$$\varphi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F),\ A \mapsto f(A) \qquad \psi : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E),\ B \mapsto f^{-1}(B)$$

1) Montrer que f est injective ssi φ est injective ssi ψ est surjective.
2) Montrer que f est surjective ssi φ est surjective ssi ψ est injective.

17 ★★★★ Soit E un ensemble non vide.

1) Construire un exemple simple d'injection de E dans $\mathscr{P}(E)$.
2) Soit $f : E \to \mathscr{P}(E)$. En considérant $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$, montrer que f ne peut être une surjection (et donc une bijection) de E sur $\mathscr{P}(E)$.
3) En déduire qu'il n'existe pas d'injection de $\mathscr{P}(E)$ sur E. *(théorème de Cantor)*
4) En déduire qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles.

Théorème de la bijection

18 ★★★ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes pour lesquelles $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Transformations du plan

19 ★ Reconnaitre les similitudes définies par

$$f_1(z) = z + i\sqrt{3} \qquad f_2(z) = 2iz + 1$$

$$f_3(z) = (1-i)z + 3i \qquad f_4(z) = (i+\sqrt{3})z - 2 + 3i$$

20 ★ Donner l'expression explicite des transformations suivantes :

1) Rotation de centre Ω d'affixe $1+i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
2) Homothétie de centre Ω d'affixe $2i$ et de rapport 3.
3) Similitude directe de centre Ω d'affixe $1-i$ de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

21 ★★☆ Déterminer la similitude qui envoie le complexe i sur $2i$ et le complexe 1 sur -2. On déterminera également la rotation et l'homothétie qui la constituent.